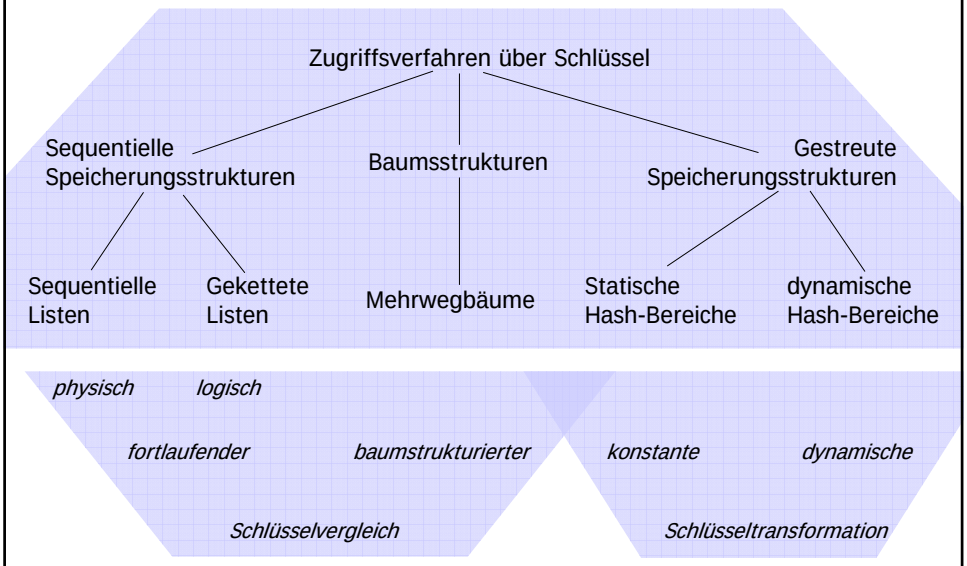
DB-Zugriffsverfahren:

- **Übersicht**
- **B-Bäume**
- **B*-Bäume**

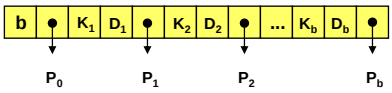
Übersicht



m-Wege-Suchbäume

Definition: Ein m-Wege-Suchbaum oder ein m-ärer Suchbaum B ist ein Baum, in dem alle Knoten einen Grad ≤ m besitzen. Entweder ist B leer oder er hat folgende Eigenschaften:

1. Jeder Knoten des Baums hat folgende Struktur:

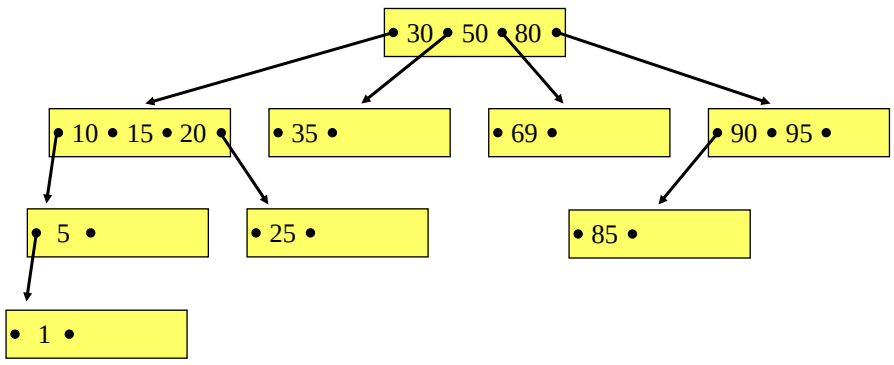


   Die P_i, $0 \le i \le b$, sind Zeiger auf die Unterbäume des Knotens und die K_i und D_i, $1 \le i \le b$, sind Schlüsselwerte und Daten.
2. Die Schlüsselwerte im Knoten sind aufsteigend geordnet: $K_i \le K_{i+1}$, $1 \le i < b$.
3. Alle Schlüsselwerte im Unterbaum von P_i sind kleiner als der Schlüsselwert K_{i+1}, $0 \le i < b$.
4. Alle Schlüsselwerte im Unterbaum von P_i sind größer als der Schlüsselwert K_i, $1 \le i \le b$.
5. Die Unterbäume von P_i, $0 \le i \le b$, sind auch m-Wege-Suchbäume.

Aufbaubeispiel m-Wege-Suchbäume

m = 4

Einfügereihenfolge: 30, 50, 80, 10, 15, 69, 90, 20, 35, 5, 95, 1, 25, 85



Beobachtung zu m-Wege-Suchbäume

Beobachtung:

Die Schlüssel in den inneren Knoten besitzen zwei Funktionen. Sie identifizieren Daten(sätze) und sie dienen als Wegweiser in der Baumstruktur.

Der m-Wege-Suchbaum ist im allgemeinen nicht ausgeglichen. Es ist für Aktualisierungsoperationen kein Balancierungsmechanismus vorgesehen.
(schlechte Platzausnutzung, Entartung)

Wichtige Eigenschaften von m-Wege-Suchbäumen

- Die D_i können Daten oder Zeiger auf die Daten repräsentieren. Zur Vereinfachung werden die D_i (in den Illustrationen) weggelassen.
- $S(P_i)$ sei die Seite, auf die P_i zeigt, und $K(P_i)$ sei die Menge aller Schlüssel, die im Unterbaum mit Wurzel $S(P_i)$ gespeichert werden können.

  Dann gelten folgende Ungleichungen:

i. $x \in K(P_0): (x < K_1)$

ii. $x \in K(P_i): (K_i < x < K_{i+1})$, *für* $i = 1, 2, \ldots, b\text{-}1$

iiii. $x \in K(P_b): (K_b < x)$

Sie gelten für alle Mehrwegbäume!

Kostenanalyse für m-Wege-Suchbäume

- **Die Anzahl der Knoten N in einem vollständigen Baum der Höhe h ist**
$$N = \sum_{i=0}^{h-1} m^i = \frac{m^h - 1}{m - 1}$$
- **bei voller Belegung ergibt sich als Anzahl der Einträge**
$$n = N \cdot (m - 1)$$
- **im ungünstigsten Fall ist der Baum völlig entartet**
$$n = N = h$$
- **Schranken für die Höhe eines m-Wege-Suchbaums**
$$\log_m (n+1) \leq h \leq n$$

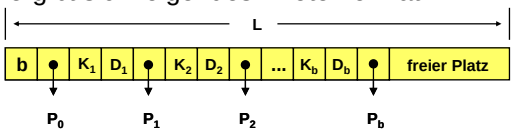
Wartungsaufwand: O(n)

B-Bäume

Definition: Seien k, h ganze Zahlen, $h \geq 0$, $k > 0$. Ein B-Baum B der Klasse τ (k,h) ist entweder ein leerer Baum oder ein geordneter Suchbaum mit folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Pfad von der Wurzel zu einem Blatt hat die gleiche Länge h-1.
2. Jeder Knoten außer der Wurzel und den Blättern hat mindestens k+1 Söhne. Die Wurzel ist ein Blatt oder hat mindestens 2 Söhne.
3. Jeder Knoten hat höchstens 2k+1 Söhne.
4. Jedes Blatt mit der Ausnahme der Wurzel als Blatt hat mindestens k und höchstens 2k Einträge.

Für einen B-Baum ergibt sich folgendes Knotenformat



B-Bäume

Einträge

- Die Einträge für Schlüssel, Daten und Zeiger haben die festen Längen l_b, l_K, l_D und l_p.
- Die Knoten- oder Seitengröße sei L.
- Maximale Anzahl von Einträgen pro Knoten $b_{\max} = \left\lfloor \frac{L - l_b - l_p}{l_K + l_D + l_p} \right\rfloor = 2k$

Reformulierung der Def.:

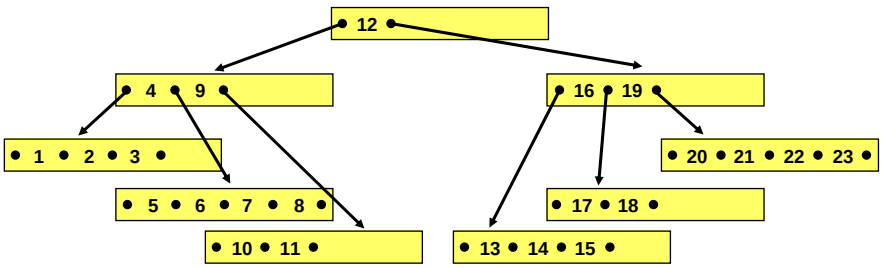
(4) und (3) ‚Eine Seite darf höchstens voll sein.'

(4) und (2) Jede Seite (außer der Wurzel) muss mindestens halb voll sein. Die Wurzel enthält mindestens einen Schlüssel.

(1) Der Baum ist, was die Knotenstruktur angeht, vollständig ausgeglichen.

B-Bäume

Beispiel: B-Baum der Klasse τ(2,3)



- In jedem Knoten stehen die Schlüssel in aufsteigender Ordnung mit $K_1<K_2<...<K_b$.
- Jeder Schlüssel hat eine Doppelrolle als Identifikator eines Datensatzes und als Wegweiser im Baum.
- Die Klassen τ(k,h) sind nicht alle disjunkt. Beispielsweise ist ein maximaler Baum aus τ(2,3) ebenso in τ(3,3) und τ(4,3).

B-Bäume

Bei einem B-Baum der Klasse $\tau(k,h)$ mit n Schlüsseln gilt für seine Höhe: $\log_{2k+1}(n+1) \le h \le \log_{k+1}((n+1)/2)+1$ *für* $n \ge 1$

$h = 0$ *für* $n = 0$

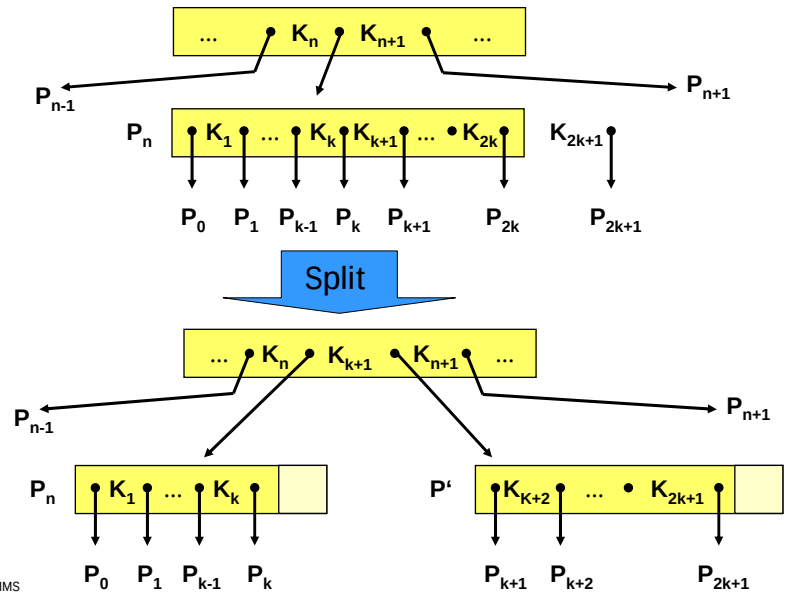
Balancierte Struktur

- unabhängig von Schlüsselmenge
- unabhängig von ihrer Einfügereihenfolge

Einfügealgorithmus (ggf. rekursiv)

- suche Einfügeposition;
- wenn Platz vorhanden ist, speichere Element, sonst schaffe Platz durch Split-Vorgang und füge ein.

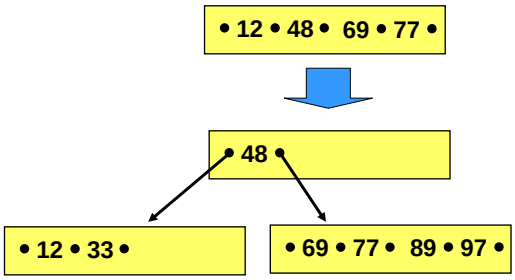
B-Bäume



B-Bäume

Beispiel: B-Baum der Klasse τ(2, h), Einfügen

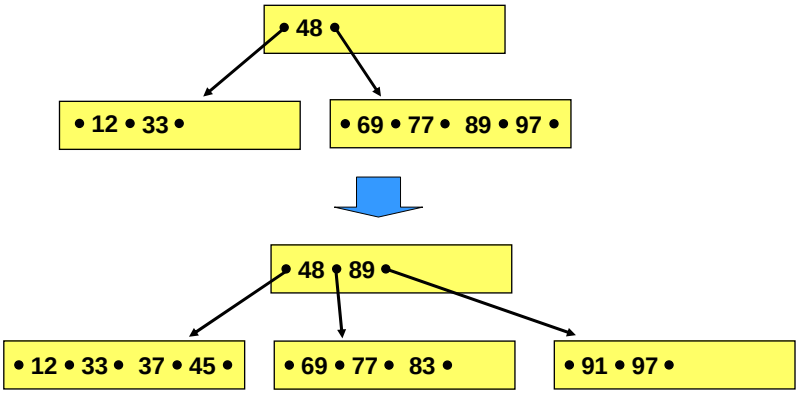
Einfügereihenfolge: 77, 12, 48, 69, 33, 89, 97, 91, 37, 45, 83, 2, 5, 57, 90, 95, 99, 50



B-Bäume

Beispiel: B-Baum der Klasse τ(2, h), Einfügen

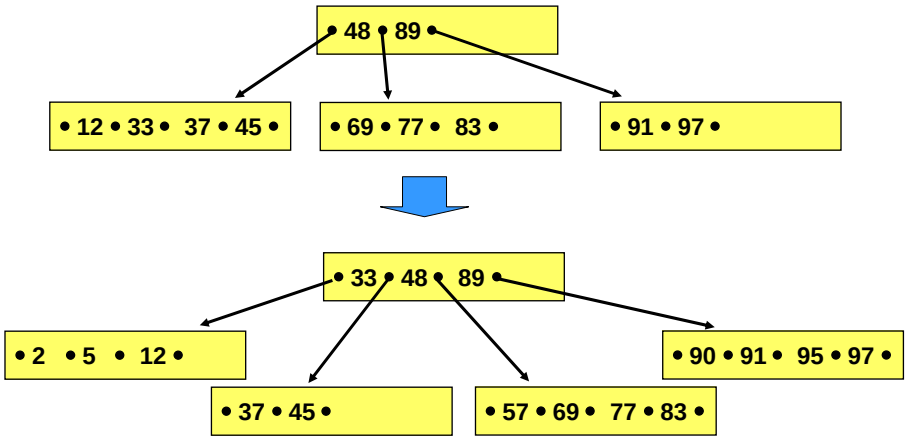
Einfügereihenfolge: 77, 12, 48, 69, 33, 89, 97, 91, 37, 45, 83, 2, 5, 57, 90, 95, 99, 50



B-Bäume

Beispiel: B-Baum der Klasse τ(2, h), Einfügen

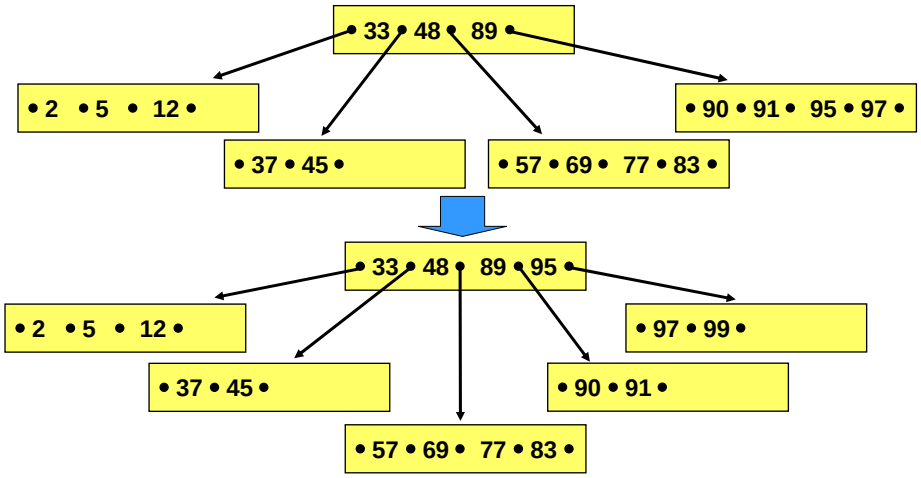
Einfügereihenfolge: 77, 12, 48, 69, 33, 89, 97, 91, 37, 45, 83, 2, 5, 57, 90, 95, 99, 50



B-Bäume

Beispiel: B-Baum der Klasse τ(2, h), Einfügen

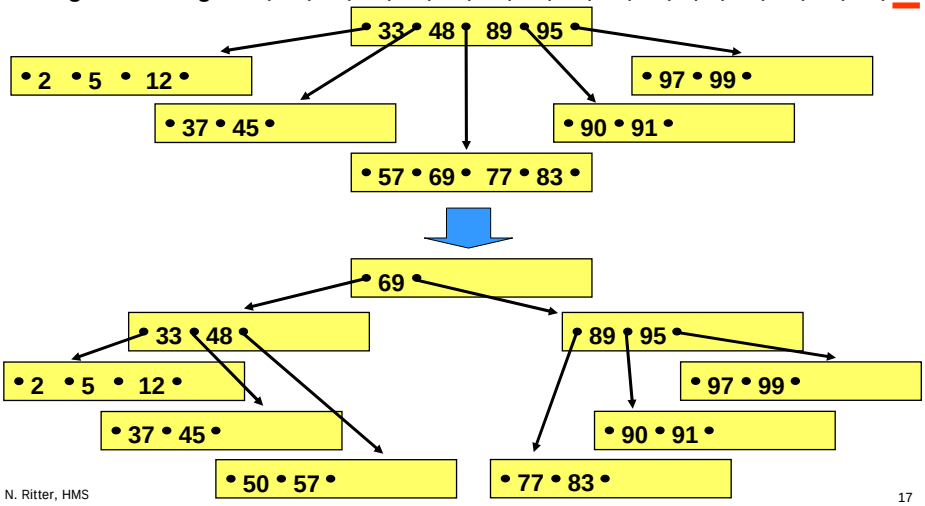
Einfügereihenfolge: 77, 12, 48, 69, 33, 89, 97, 91, 37, 45, 83, 2, 5, 57, 90, 95, 99, 50



B-Bäume

Beispiel: B-Baum der Klasse τ(2, h), Einfügen

Einfügereihenfolge: 77, 12, 48, 69, 33, 89, 97, 91, 37, 45, 83, 2, 5, 57, 90, 95, 99, 50



B-Bäume

Kostenanalyse für Einfügen und Suchen

Anzahl der zu holenden Seiten : f (fetch)

Anzahl der zu schreibenden Seiten : w (write)

Direkte Suche

$f_{min} = 1$: der Schlüssel befindet sich in der Wurzel

$f_{max} = h$: der Schlüssel ist in einem Blatt

$f_{avg} = ?$: bei maximaler/minimaler Belegung des B-Baumes

B-Bäume

Kostenanalyse Direkte Suche

gesamte Zugriffskosten bei maximaler Belegung

$$z_{\max} = 2k \cdot \sum_{i=0}^{h-1} (i+1) \cdot (2k+1)^i = h \cdot m^h - 1 - \frac{m^h - m}{m-1} \; mit \; m = 2k+1$$

mittlere Zugriffskosten bei maximaler Belegung

$$f_{avg}(\max) = \frac{z_{\max}}{n_{\max}} = h - \frac{1}{2k} + \frac{h}{(2k+1)^h - 1}$$

gesamte Zugriffskosten bei minimaler Belegung

$$z_{\min} = 1 + 2k \cdot \sum_{i=0}^{h-2} (i+2) \cdot (k+1)^i = 1 + 2h \cdot m^{h-1} - 4 - 2\frac{m^{h-1} - m}{m-1} \; mit \; m = k+1$$

mittlere Zugriffskosten bei minimaler Belegung

$$f_{avg}(\min) = \frac{z_{\min}}{n_{\min}} = h - \frac{1}{k} + \frac{h-1}{2(k+1)^{h-1} - 1} + \frac{1}{k(2(k+1)^{h-1} - 1)}$$

B-Bäume

Kostenanalyse Direkte Suche (Forts.)

Abschätzung möglich, da k meistens im Bereich ‚100 bis 200‘:

$$f_{avg} = h \qquad \text{für h=1}$$

$$h - \frac{1}{k} \le f_{avg} \le h - \frac{1}{2k} \qquad \text{für h>1}$$

Beim B-Baum sind die maximalen Zugriffskosten eine gute Abschätzung der mittleren Zugriffskosten:

bei h=3 und k=100 ergibt sich $2.99 \le f_{avg} \le 2.995$

B-Bäume

Kostenanalyse (Forts.)

Sequentielle Suche

Durchlauf in symmetrischer Ordnung: $f_{seq} = N$;
Pufferung der Zwischenknoten im HSP wichtig!

Einfügen

günstigster Fall (kein Split): $f_{\min} = h; \quad w_{\min} = 1;$

ungünstigster Fall: $f_{\max} = h; \quad w_{\max} = 2h+1;$

durchschnittlicher Fall: $f_{avg} = h; \quad w_{avg} < 1+\frac{2}{k};$

(wenn k=100 unterstellt wird, kostet eine Einfügung im Mittel w_{avg}<1+2/100 Schreibvorgänge, d.h., es entsteht eine Belastung von 2% für den Split)

B-Bäume

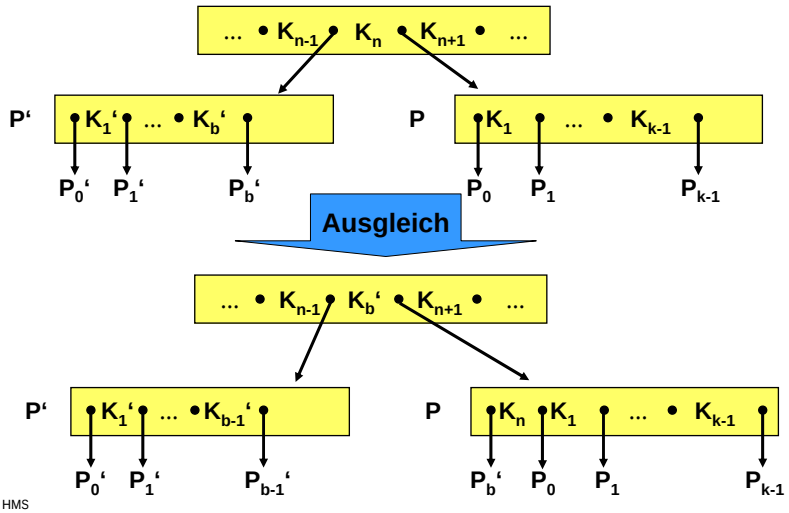
Löschen

Die B-Baum-Eigenschaft muss wiederhergestellt werden, wenn die Anzahl der Elemente in einem Knoten kleiner als k wird.

Durch **Ausgleich** mit Elementen aus einer Nachbarseite oder durch **Mischen** (Konkatenation) mit einer Nachbarseite wird dieses Problem gelöst. Beim Ausgleichsvorgang sind in der Seite P k-1 Elemente und in P' mehr als k Elemente.

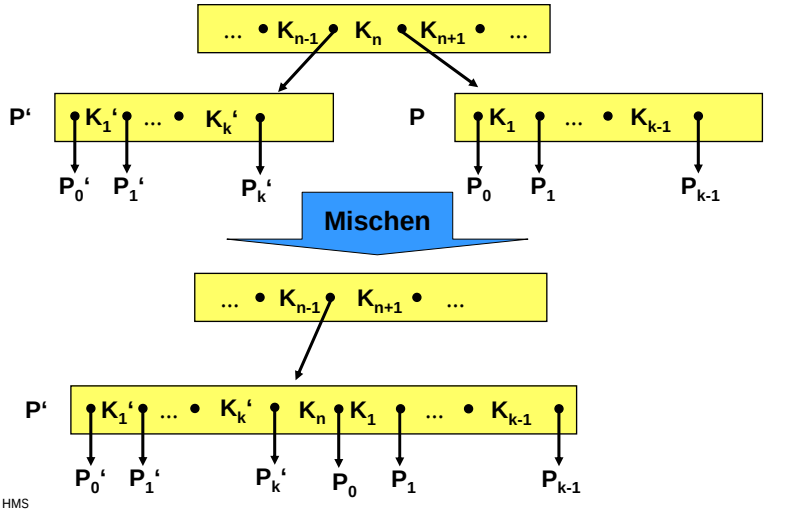
B-Bäume

Löschmaßnahme: Ausgleich durch Verschieben von Schlüsseln



B-Bäume

Löschmaßnahme: Mischen von Seiten



B-Bäume

Löschalgorithmus

1. **Löschen in Blattseite**

   Suche x in Seite P;

   Entferne x in P und wenn

   b ≥ k in P: tue nichts,

   b = k-1 in P und b > k in P': gleiche Unterlauf über P' aus,

   b = k-1 in P und b = k in P': mische P und P'.

2. **Löschen in innerer Seite**

   Suche x;

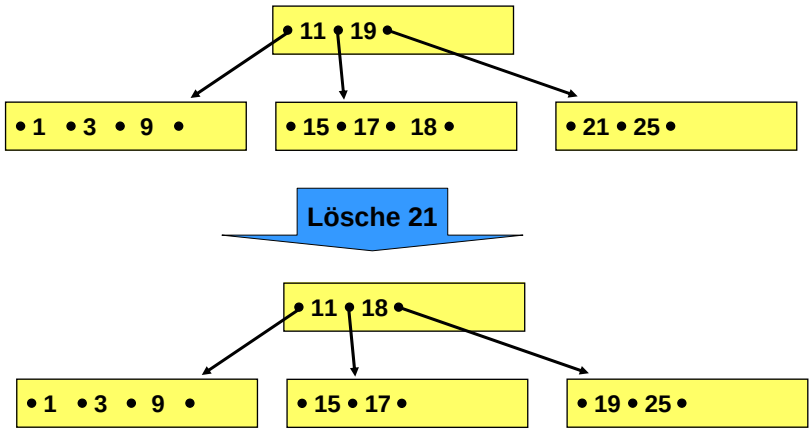
   Ersetze x = K_i durch kleinsten Schlüssel y in B(P_i) oder größten Schlüssel y in B(P_{i-1}) (nächst größerer oder nächst kleinerer Schlüssel im Baum);

   Entferne y im Blatt P;

   Behandle P wie unter 1.

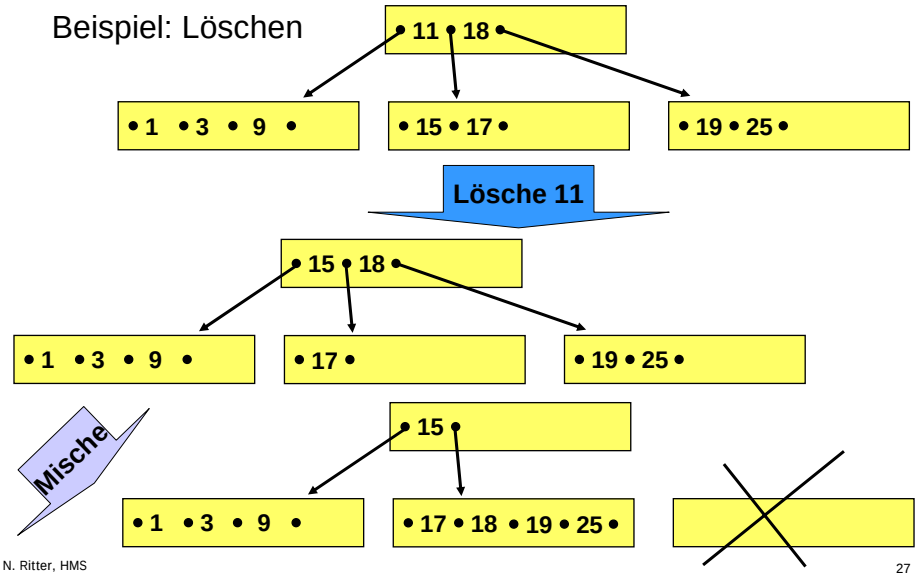
B-Bäume

Beispiel: Löschen



B-Bäume

Beispiel: Löschen



B-Bäume

Kostenanalyse Löschen

günstigster Fall: $f_{\min} = h; \quad w_{\min} = 1;$

ungünstigster Fall (pathologisch): $f_{\max} = 2h - 1; \quad w_{\max} = h + 1;$

obere Schranke für durchschnittliche Löschkosten
(drei Anteile: 1. Löschen, 2. Ausgleich, 3. anteilige Mischkosten):

$$f_{avg} \leq f_1 + f_2 + f_3 < h + 1 + \frac{1}{k}$$

$$w_{avg} \leq w_1 + w_2 + w_3 < 2 + 2 + \frac{1}{k} = 4 + \frac{1}{k}$$

B*-Bäume

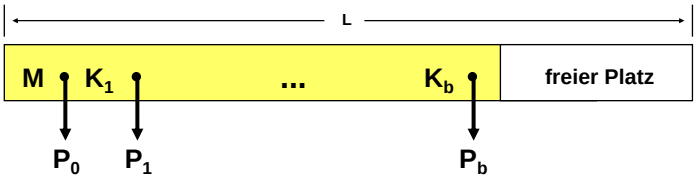
Definition: Seien k, k* und h* ganze Zahlen, $h^* \geq 0$, $k, k^* > 0$.
Ein B*-Baum B der Klasse t (k,k*,h*) ist entweder ein leerer Baum oder ein geordneter Suchbaum, für den gilt:

1. Jeder Pfad von der Wurzel zu einem Blatt besitzt die gleiche Länge h*-1.
2. Jeder Knoten außer der Wurzel und den Blättern hat mindestens k+1 Söhne, die Wurzel mindestens 2 Söhne, außer wenn sie ein Blatt ist.
3. Jeder innere Knoten hat höchstens 2k+1 Söhne.
4. Jeder Blattknoten mit Ausnahme der Wurzel als Blatt hat mindestens k* und höchstens 2k* Einträge.

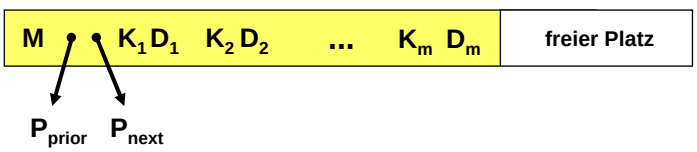
B*-Bäume

2 Knotenformate:

innerer Knoten



Blattknoten



M enthalte eine Kennung des Seitentyps sowie die Zahl der aktuellen Einträge

B*-Bäume

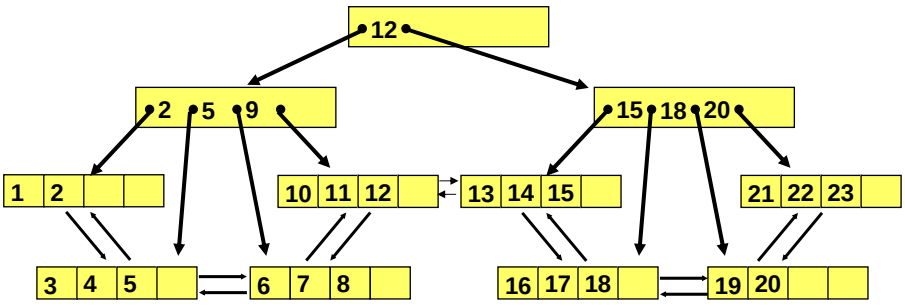
Es gilt:

$$L = l_M + l_P + 2 \cdot k(l_K + l_P); \qquad k = \left\lfloor \frac{L - l_M - l_P}{2 \cdot (l_K + l_P)} \right\rfloor$$

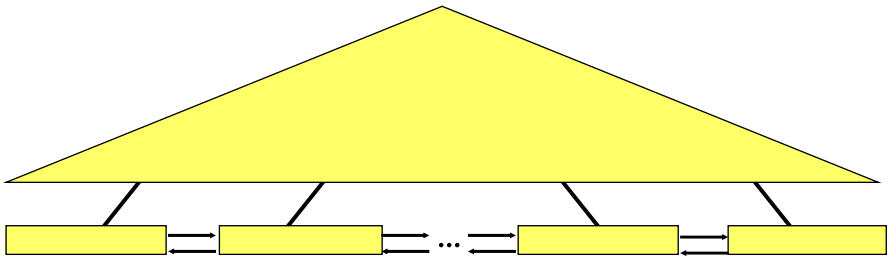
$$L = l_M + 2 \cdot l_P + 2 \cdot k^*(l_K + l_D); \qquad k^* = \left\lfloor \frac{L - l_M - 2l_P}{2 \cdot (l_K + l_D)} \right\rfloor$$

B*-Bäume

Beispiel: B*-Baum der Klasse τ(3, 2, 3)



B*-Bäume



Erklärungsmodell für den B*-Baum

Der B*-Baum lässt sich auffassen als eine gekettete sequentielle Datei von Blättern, die einen Indexteil besitzt, der selbst ein B-Baum ist. Im Indexteil werden insbes. beim Split-Vorgang die Operationen des B-Baums eingesetzt.

B*-Bäume

Grundoperationen beim B*-Baum

Direkte Suche:
Da alle Schlüssel in den Blättern sind, kostet jede direkte Suche h* Zugriffe. h* ist jedoch im Mittel kleiner als h in B-Bäumen. Da f_{avg} beim B-Baum in guter Näherung mit h abgeschätzt werden kann, erhält man also durch den B*-Baum eine effizientere Unterstützung der direkten Suche.

Sequentielle Suche:
Sie erfolgt nach Aufsuchen des Linksaußen der Struktur unter Ausnutzung der Verkettung der Blattseiten. Es sind zwar ggf. mehr Blätter als beim B-Baum zu verarbeiten, doch da nur h*-1 innere Knoten aufzusuchen sind, wird die sequentielle Suche ebenfalls effizienter ablaufen.

B*-Bäume

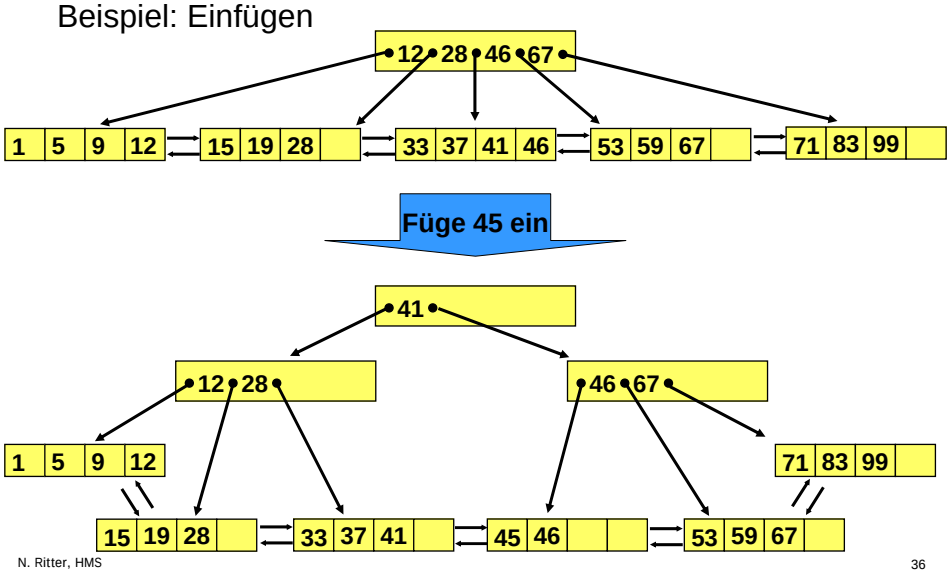
Grundoperationen beim B*-Baum (Forts.)

Einfügen:
Es ist von der Durchführung und vom Leistungsverhalten her dem Einfügen in einen B-Baum sehr ähnlich. Bei inneren Knoten wird die Spaltung analog zum B-Baum durchgeführt. Beim Split-Vorgang einer Blattseite muss gewährleistet sein, dass jeweils die höchsten Schlüssel einer Seite als Wegweiser in den Vaterknoten kopiert werden. Die Verallgemeinerung des Split-Vorgangs lässt sich analog zum B-Baum einführen.

Löschen:
Datenelemente werden immer von einem Blatt entfernt (keine komplexe Fallunterscheidung wie beim B-Baum). Weiterhin muss beim Löschen eines Schlüssels aus einem Blatt dieser Schlüssel nicht notwendigerweise aus dem Indexteil entfernt werden; er kann seine Funktion als Wegweiser behalten.

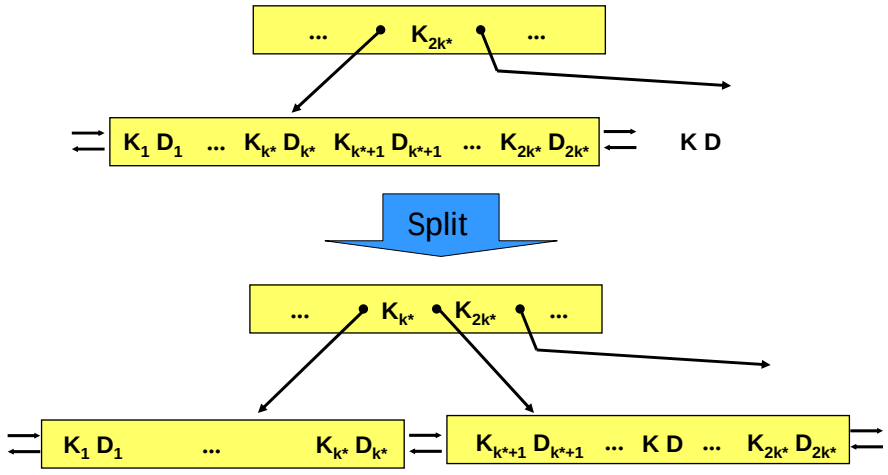
B*-Bäume

Beispiel: Einfügen



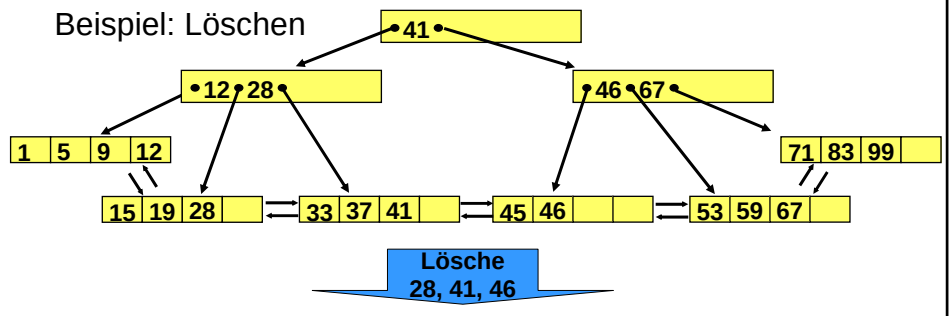
B*-Bäume

Schema für den **Split-Vorgang:**



B*-Bäume

Beispiel: Löschen



B*-Bäume

Eigenschaften:

Anzahl der Blattknoten bei minimaler Belegung

$$B_{\min}(k, h^*) = 1 \qquad \text{für } h^* = 1$$

$$B_{\min}(k, h^*) = 2(k+1)^{h^*-2} \qquad \text{für } h^* \geq 2$$

Minimale Anzahl von Elementen

$$n_{\min}(k, k^*, h^*) = 1 \qquad \text{für } h^* = 1$$

$$n_{\min}(k, k^*, h^*) = 2k^* \cdot (k+1)^{h^*-2} \qquad \text{für } h^* \geq 2$$

B*-Bäume

Eigenschaften (Forts.):

Anzahl der Blattknoten bei maximaler Belegung

$$B_{max}(k, h^*) = (2k+1)^{h^*-1} \text{ für } h^* \geq 1$$

Maximale Anzahl von Elementen

$$n_{max}(k, k^*, h^*) = 2k^* (2k+1)^{h^*-1} \text{ für } h^* \geq 1$$

Es lässt sich zeigen, dass die Höhe h* eines B*-Baumes mit n Datenelementen begrenzt ist durch

$$1+\log_{2k+1}(n/2k^*) \leq h^* \leq 2+\log_{k+1}(n/2k^*) \quad \text{für } h^* \geq 2$$

B- und B*-Baum: Quantitativer Vergleich

Seitengröße L: 2048 Bytes
Zeiger P_i, Schlüssel K_i, Hilfsinformation: 4 Bytes
Daten D_i eingebettet: 76 Bytes; separat: 4 Bytes (Zeiger)

Datensätze separat (k=85)

h	n_{min}	n_{max}
1	1	170
2	171	29.240
3	14.791	5.000.210
4	1.272.112	855.036.083

Datensätze eingebettet (k=12)

h	n_{min}	n_{max}
1	1	24
2	25	624
3	337	15.624
4	4.393	390.624

B-Baum

B- und B*-Baum: Quantitativer Vergleich

Datensätze separat
(k=127, k*=127)

h	n_{min}	n_{max}
1	1	254
2	254	64.770
3	32.512	16.516.350
4	4.161.536	4.211.669.268

Datensätze eingebettet
(k=12, k*=127)

h	n_{min}	n_{max}
1	1	24
2	24	6.120
3	3.072	1.560.600
4	393.216	397.953.001

B*-Baum

Weiterführende Literatur B*-Bäume

Härder, T.: Mehrwegbäume
Härder, T., Rahm, E: Datenbanksysteme – Konzepte und Techniken der Implementierung, Springer, 1999.