

Semantik für Modallogiken  
Lewis vs. Kripke

Alexander Pokahr

13. September 1998

## 1 Einleitung

Was wollen wir, wenn wir Modallogik betreiben? Wir haben eine Menge von Gegenständen (Individuen), für die wir ‘Zustände’ beschreiben wollen. Wir wollen die Zustände unterscheiden in notwendige Zustände, Zustände die kontingenter Weise der Fall sind, Zustände die nicht der Fall, aber möglich sind, und Zustände die unmöglich sind.

Die Modallogik leistet dies mit den Operatoren ‘notwendig’ ( $\Box$ ) und ‘möglich’ ( $\Diamond$ ), wobei jeweils der eine durch den anderen beschrieben werden kann (zB.  $\Diamond =_{df} \neg\Box\neg$ ). Was uns fehlt ist eine semantische Interpretation der modalen Operatoren.

### Mögliche Welten Semantik

In der Semantik von Kripke [1] konstruieren wir uns zu diesem Zweck einen Rahmen, der aus einer Menge von ‘Welten’ besteht, und eine Relation zwischen den Welten definiert, die ‘Zugänglichkeits-’ bzw. ‘Möglichkeits-’ relation. In einem (quantifizierten) Modell füllen wir die Welten mit Sinn, indem wir jedem Prädikat in jeder Welt eine Extension zuschreiben, wobei natürlich gleiche Prädikate in unterschiedlichen Welten eine verschiedene Extension haben können. Obwohl nun die Individuen ein und dieselben bleiben, gelten für sie in unterschiedlichen Welten unterschiedliche Prädikate. Kripke trennt damit den Quantifikationsbereich (Individuen) von der semantischen Interpretation (Welten).

Lewis [2] hingegen ist der Ansicht, das Kripke über Welten quantifiziert, und er möchte das explizit machen. Um seine ‘modal realism’ Ontologie in eine mögliche Welten Semantik umzusetzen, erfindet Lewis seine Counterpart-Theorie. Im Gegensatz zu Kripke, der die Zugänglichkeiten durch eine Relation über Welten interpretiert, interpretiert Lewis sie durch eine Relation über Individuen (Counterpart-Relation).

## 2 Formal

Es folgt ein kurzer formaler Abriss über die Semantiken von Lewis und Kripke, wobei wir uns auf das für diesen Aufsatz Wesentliche beschränken.

### Mögliche Welten Semantik nach Kripke

Um Modalitäten zu beschreiben, definiert man bei Kripke einen Rahmen, der aus einer Menge  $K$  von möglichen Welten besteht, die über eine Zugänglichkeitsrelation  $R \subseteq K \times K$  in Beziehung gesetzt werden. Für ein quantifiziertes Modell fügen wir dem Rahmen noch eine Funktion  $\Psi$  hinzu, die jedem  $H \in K$  einen Individuenbereich zuordnet. In einem Modell brauchen wir dann noch eine Bewertungsfunktion  $\varphi$ , die jeder atomaren Formel (Aussagenvariable) in jeder Welt einen Wahrheitswert  $\in \{T, F\}$ , und für ein quantifiziertes Modell jedem atomaren Prädikat in jeder Welt eine Extension, die nur Individuen aus dem Individuenbereich dieser Welt enthält, zuordnet. Die semantische Interpretation der modalen Operatoren ist nun, dass  $\Box P$  bedeutet, dass  $P$  in allen zugänglichen Welten  $= T$  ist, und  $\Box Pa$ , dass  $a$  in allen zugänglichen Welten zur Extension von  $P$  gehört.

### Mögliche Welten Semantik nach Lewis

Die semantische Interpretation von Lewis ist auch unter der Bezeichnung ‘modal realism’ bekannt. Ihr liegt eine Ontologie real-existierender alternativer Welten zugrunde, die gleichzeitig all das darstellen, was in jeweils anderen Welten möglich ist. Real-existierende alternative Welten werfen das Problem auf, dass in ihnen die Individuen ebenfalls real existieren und daher jedes Individuum nur in einer einzigen Welt existiert. Um über diesen Individuen Modalitäten zu beschreiben, muss man sie über die Welten hinweg in Beziehung zueinander setzen, um zu jedem Individuum die Gegenstücke (Counterparts) in anderen Welten bestimmen zu können.

Lewis sieht es als wünschenswert an, die semantische Interpretation nicht von der formalen Notation zu trennen, und entwickelt eine Erweiterung der Prädikatenlogik, die aus vier Prädikaten und acht Postulaten besteht: Das einstellige Welten-Prädikat ( $Wx$ ), das zweistellige Enthaltensein-Prädikat ( $Ixy$ ), das Aktualheits-Prädikat ( $Ax$ ) und das Counterpart-Prädikat ( $Cxy$ ). Die Postulate grenzen die Prädikate ein, so zB. dass das Counterpart-Prädikat eine reflexive Relation darstellen muss.

Die modalen Operatoren ( $\Box$ ,  $\Diamond$ ) werden nun anhand von Übersetzungsregeln in die herkömmliche Prädikatenlogik, erweitert um die lewisschen Prädikate, übersetzt. Die Semantik der Formeln ergibt sich aus der wörtlichen

Bedeutung der Quantoren und Prädikate.

Das Problem für Lewis besteht darin, dass bei Ausdrücken der Form  $Pa \ \& \ \Box Pa$ , das erste  $a$  und das zweite  $a$  nicht dasselbe Individuum bezeichnen können, da eines im Skopus eines modalen Operators steht, und daher einen (im Regelfall von  $a$  verschiedenen) Counterpart von  $a$  bezeichnet. Dies kann zu zwei möglichen Schlüssen führen: Erstens, die 'modal realism'-Ontologie ist als Semantik für Modallogiken unbrauchbar, oder zweitens, die Prädikatenlogik mit modalen Operatoren ist zum Ausdrücken der 'modal realism'-Semantik nicht geeignet.

Lewis kommt natürlich zum zweiten Schluss, was der Grund dafür ist, dass bei ihm die modalen Operatoren übersetzt und durch seine Prädikate direkt in der Prädikatenlogik formalisiert werden müssen.

### 3 Modallogik als Möglichkeitsrelation

So unterschiedlich die Systeme von Lewis und Kripke in Ihrem Aufbau auch sein mögen, so ähnlich sind sie sich doch in ihrem Ansatz zur Beschreibung von Modalitäten. Die formale Modallogik bietet die Möglichkeit Modalitäten zweiter und höherer Ordnung zu formalisieren (zB.  $\diamond\diamond P$ ). Sowohl Kripke als auch Lewis erreichen diese Mehrdimensionalität durch eine Relation. Bei Kripke haben wir Welten, die möglich sind, relativ zu möglichen Welten (Weltenrelation), bei Lewis haben wir Counterparts von Counterparts (Counterpart-Relation).

#### Verschiedene Systeme von Modallogik

Dabei stehen die Eigenschaften der Relation (reflexiv, transitiv, symmetrisch, ...) in direkter Beziehung zu den verschiedenen Systemen von Modallogik (M, S4, S5, ...). So erhalten wir zB. System M (Axiom:  $\Box P \rightarrow P$ ), in dem wir eine reflexive Relation wählen<sup>1</sup>.

Dies gilt sowohl für Kripkes Relation über (konstruierte) Welten, als auch für Lewis Counterpart-Relation, wobei natürlich die Unterschiede im Detail liegen. Im folgenden soll nun behandelt werden, wo die Unterschiede zwischen den beiden Alternativen liegen, und warum sich die Autoren jeweils für ihre Version entschieden haben.

#### Relation zwischen Welten

Kripkes Semantik baut auf einer Relation zwischen Welten auf. Um diese Relation genauer zu untersuchen, müssen wir uns erst darüber im Klaren sein, was 'Welten' bei Kripke überhaupt sind. Anders als bei Lewis sind 'Welten' bei Kripke nicht etwa reale Entitäten, sondern nur ein formales Konstrukt. Bei Kripke sind Welten dadurch bestimmt, dass sie einen Individuenbereich haben und eine Extension für alle Prädikate definieren. Zusammenfassend könnte man sagen, eine Welt ist eine Menge konsistenter Sätze über einem Individuenbereich.

Wenn wir also von einer Relation über mögliche Welten sprechen, dann meinen wir (zumindest nach Kripke) eine Relation über Satzmengen. Die formalen Operatoren lassen sich jetzt direkt auf mögliche Welten bzw. alternative Satzmengen übertragen. Es wird eine Satzmenge als aktual ausgezeichnet,

---

<sup>1</sup>Da bei Lewis die Reflexivität durch Postulat 6 immer gegeben sein muss, ist System K (frei wählbare Relation) bei Lewis nicht formalisierbar. Dies liegt jedoch nur daran, das System K nicht mit Lewis' 'modal realism' in Einklang zu bringen ist. Würde man Postulat 6 weglassen, wäre auch System K für Lewis' Semantik kein Problem.

die für alle Sätze gilt, die nicht im Skopus eines modalen Operators stehen. Ein modaler Operator bedeutet dann, dass wir alle Satzmengen betrachten müssen, die in Relation zur übergeordneten Satzmenge stehen. Im Falle des Notwendigkeitsoperators muss der Teilsatz in allen betrachteten Mengen enthalten sein, im Falle des Möglichkeitsoperators genügt es, wenn der Teilsatz in einer der Satzmengen enthalten ist.

Doch wie ist nun diese Möglichkeitsrelation zwischen Welten bzw. Satzmengen zu verstehen. Auf diese Frage finden wir zunächst keine Antwort, aber wir haben das Problem 'was ist möglich' immerhin von der formalen auf die semantische Ebene verlagern können.

## Relation zwischen Individuen

Lewis geht noch einen Schritt weiter, und möchte auf der ontologischen Ebene die definitive Antwort geben. Ob man ihm zustimmt, muss jeder für sich selbst entscheiden. Aber auch schon in der Semantik besteht der große Unterschied zu Kripke darin, dass bei Lewis die Möglichkeitsrelation über Individuen geht, und nicht über Welten.

Anders als bei Kripke hat bei Lewis jedes Individuum nur genau eine Welt, in der es existiert. Bei Kripke ist die Menge der Individuen gleich dem Quantifikationsbereich. Die Individuen nun auch für die semantische Interpretation heranzuziehen, macht die Semantik unübersichtlich, allerdings hat Lewis dafür zwei Gründe. Zum einen kommt er mit einer Relation nur über Welten nicht weit, da jedes Individuum nur in einer einzigen Welt existiert, zum anderen geht Lewis' Quantifikationsbereich nicht nur über Individuen, sondern schließt auch die zu seiner Ontologie gehörenden Welten mit ein, was alleine schon zu einer gewissen Unübersichtlichkeit führt. Lewis hat also keine andere Wahl, als eine Relation über Individuen zuzulassen, dennoch ist sein Ansatz vielleicht nicht unbedingt sehr glücklich gewählt. Einige der Probleme des lewisschen Ansatzes werden im nächsten Abschnitt zur Sprache kommen.

## 4 Grenzen der Symmetrie

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, entbehren die Semantiken von Lewis und Kripke nicht einer gewissen Symmetrie in der Art, wie sie Möglichkeit und Notwendigkeit formalisieren, doch wie wirken sich die vorhandenen Unterschiede formal aus? Wir betrachten im folgenden, wie Existenz von Individuen zu formalisieren ist, und welche Modalitäten dabei von Bedeutung sind.

### Modalitäten der Existenz bei Lewis

Existenz kann man auf verschiedene Weisen formalisieren, zum einen durch den Existenzquantor ( $\exists x_1(x_1 = x)$ ), zum anderen durch ein Existenzprädikat ( $Ex$ ). Betrachten wir zum Beispiel

$$\neg\exists x_1(x_1 = x) \ \& \ \diamond\exists x_1(x_1 = x) \quad (1)$$

( $x$  existiert nicht, und es ist möglich, dass  $x$  existiert)

so erhalten wir nach Lewis:

$$\neg\exists x_1(x_1 = x) \ \& \ \exists y\exists x_2(Wy \ \& \ Ix_2y \ \& \ Cxx_2 \ \& \ \exists x_1(x_1 = x_2)) \quad (2)$$

Wie es sein sollte, fordert die Counterpart-Theorie, dass es, damit die Existenz von  $x$  möglich ist, eine Welt gibt, in der ein Counterpart von  $x$  existiert. Nach Postulat 4<sup>2</sup> fordert die Counterpart-Theorie aber auch, dass  $x$  selbst in einer Welt sein muss, wenn auch nicht existent. Das Gleiche gilt bei der Formalisierung durch ein Existenzprädikat:

$$\neg Ex \ \& \ \diamond Ex \quad (3)$$

nach Lewis:

$$\neg Ex \ \& \ \exists y\exists x_1(Wy \ \& \ Ixy \ \& \ Cxx_1 \ \& \ Ex_1) \quad (4)$$

Wir wollen auch noch den umgekehrten Fall betrachten, dass  $x$  existiert, und es möglich ist, dass  $x$  nicht existiert, also:

$$\exists x_1(x = x_1) \ \& \ \diamond\neg\exists x_1(x = x_1) \quad (5)$$

bzw.

$$Ex \ \& \ \diamond\neg Ex \quad (6)$$

Die Umsetzung in die Counterpart-Theorie ergibt:

$$\exists x_1(x = x_1) \ \& \ \exists y\exists x_2(Wy \ \& \ Ix_2y \ \& \ Cxx_2 \ \& \ \neg\exists x_1(x_2 = x_1)) \quad (7)$$

---

<sup>2</sup>P4:  $\forall x\forall y(Cxy \longrightarrow \exists zIyz)$  (Whatever has a counterpart is in a world)

bzw.

$$Ex \ \& \ \exists y \exists x_2 (Wy \ \& \ Ix_2y \ \& \ Cxx_2 \ \& \ \neg Ex_2) \quad (8)$$

Aus (7) fällt folgendes Fragment auf:  $\exists x_2 (\neg \exists x_1 (x_2 = x_1))$ , welches unerfüllbar ist. Das bedeutet, dass aus der Existenz von  $x$  die notwendige Existenz von  $x$  folgt, alle Dinge existieren also notwendiger Weise. Es ist fraglich ob, wie es in Lewis Semantik der Fall ist, die notwendige Eigenschaft der Existenz mit der Kontingtheit der Nichtexistenz sinnvoll zu vereinigen ist, oder ob diese Tatsache einen Fehler in Lewis Semantik darstellt.

## Modalitäten der Existenz bei Kripke

In Kripkes Semantik können solche Existenzfragen sehr einfach und intuitiv beantwortet werden, indem man die Individuenbereiche ( $\Psi$ ) der möglichen Welten geeignet wählt, bzw. dem Existenzprädikat ( $E$ ) in den möglichen Welten eine geeignete Extension verleiht. Wir werden dies durch ein Modell über einem Rahmen  $(G, K, R)$  in dem (5) bzw. (6) erfüllbar sind kurz verdeutlichen:

$$\begin{aligned} K &= \{G, H\} \\ R &= K \times K \\ \Psi(G) &= \{a\} \\ \Psi(H) &= \emptyset \\ \varphi((x)Ex, G) &= \{a\} \\ \varphi((x)Ex, H) &= \emptyset \end{aligned} \quad (9)$$

In diesem Modell gilt:

$$\exists x (a = x) \ \& \ \diamond \neg \exists x (a = x) \quad (10)$$

bzw.

$$Ea \ \& \ \diamond \neg Ea \quad (11)$$

Hierbei gilt es zu bedenken, dass  $\varphi(x = x_1, H)$  in der einfachen Interpretation<sup>3</sup> nur dann =  $T$  ist, wenn sowohl  $x$ , als auch  $x_1 \in \Psi(H)$  sind. Damit kann  $\exists x_1 (x = x_1)$  auch dann =  $F$  sein, wenn  $x$  im Quantifikationsbereich ist.

## Konverse der Barcan-Formel

Ein weiteres Beispiel für den Unterschied zwischen den Semantiken ist die Konverse der Barcan Formel ( $\Box \forall x Px \models \forall x \Box Px$ ), welche bei Lewis ein Theorem ist, bei Kripke jedoch nicht, wie wir uns kurz noch einmal verdeutlichen können:

<sup>3</sup>Andere Ansätze wären zB. dreiwertige Logiken, in denen man Notwendigkeit wahlweise als ‘in allen Welten wahr’, oder als ‘in allen Welten nicht falsch’ interpretieren könnte.

**Kripke:**

$$\begin{aligned}
K &= \{G, H\} \\
R &= K \times K \\
\Psi(G) &= \{a, b\}, \text{ mit } (a \neq b) \\
\Psi(H) &= \{a\} \\
\varphi((x)Px, G) &= \{a, b\} \\
\varphi((x)Px, H) &= \{a\}
\end{aligned} \tag{12}$$

$\forall x(Px)$  gilt in  $G, H$  also  $\varphi(\Box\forall x(Px), G) = T$ . Aber:  $\varphi(Px, H) = F$ , für  $x = b$ , also  $\varphi(\Box Px, G) = F$ , für  $x = b$ , also  $\varphi(\forall x(\Box Px), G) = F$ , was einen Gegenbeweis darstellt.

**Lewis:**

$$\begin{aligned}
&\Box\forall x(Px) \\
&\text{übersetzt:} \\
&\forall y_1(Wy_1 \rightarrow \forall x_1(Ix_1y_1 \rightarrow Px_1)) \\
&\text{Quantoren umstellen:} \\
&\forall y_1\forall x_1(Wy_1 \wedge Ix_1y_1 \rightarrow Px_1) \\
&x_1 \text{ einschränken auf Counterparts von aktuellen Dingen:} \\
&\forall a(Ia@ \rightarrow \forall y_1\forall x_1(Wy_1 \wedge Ix_1y_1 \wedge Cx_1a \rightarrow Px_1)) \\
&\text{rückübersetzt:} \\
&\forall x(\Box Px) \\
&\text{q.e.d.}
\end{aligned} \tag{13}$$

**Erläuterung**

Bei Kripke scheitert die Umkehrung der Barcan-Formel daran, dass ein Individuum nicht in jeder möglichen Welt existieren muss ( $b$  existiert in  $G$ , aber nicht in  $H$ ). Deshalb kann  $Pb$  in  $H$  falsch sein obwohl  $\forall x(Px)$  in  $H$  wahr ist.

Auch bei Lewis muss ein Individuum nicht in jeder Welt einen Counterpart besitzen, aber da bei Lewis die Zugänglichkeitsrelation über Individuen geht, werden nur die Welten betrachtet, in denen Counterparts von  $x$  existieren. Daher gibt es in jeder Welt, in der das Prädikat  $P$  untersucht wird einen Counterpart, weshalb im Beweis  $x_1$  tatsächlich nur eingeschränkt wird und keine nicht-existierenden Individuen auftauchen können.

**Zusammenfassung**

Wie kommt es zu diesen Unterschieden, obwohl sich die Semantiken so ähnlich sind? Wir haben gesehen, dass bei Lewis nur die Welten untersucht werden, in denen Counterparts der zu untersuchenden Individuen enthalten

sind. Untersuche ich  $a$ , so betrachte ich nur die Welten für die gilt:  $\exists x(Cax)$ , die Quantifizierung wird also auf genau die Welten eingeschränkt, die Counterparts von  $a$  enthalten.

Eine Lösung für das Problem der notwendigen Existenz bei Lewis wäre, notwendige Existenz grundsätzlich anders zu interpretieren (zB. 'in allen Welten Counterparts haben', oder weniger streng 'in allen Welten, in denen Counterparts von aktualen Dingen existieren, Counterparts zu haben'). Damit wird jedoch die formale Ebene verlassen, und notwendige Existenz anders interpretiert als der Notwendigkeitsoperator.

Warum ist das nötig? Kripke trennt den Quantifikationsbereich (Individuen) vom semantischen Hintergrund (Welten). Bei Lewis geht alles durcheinander. Die Individuen werden genauso formal, wie auch semantisch (falls man in Lewis Fall überhaupt von Semantik sprechen kann) verwendet, also sowohl als Extension der Prädikate, als auch zur Festlegung der Modalitäten. Zusätzliche Schwierigkeiten bereitet auch, dass die Semantik direkt in Formeln der Prädikatenlogik ausgedrückt wird, wodurch die Formeln unübersichtlich werden.

## 5 Alternativer Ansatz

Die lewissche Semantik führt also zu einer Reihe von Problemen, die bei Kripke nicht auftreten. Dies liegt jedoch nicht an der Zugänglichkeitsrelation über Individuen, sondern ist vielmehr ein spezielles Problem der lewisschen Semantik. Dies zeigen wir durch einen alternativen Ansatz einer Relation über Individuen, die sich von der formalen Seite her stark an Kripke anlehnt.

### Formal

Wie Kripke beginnen wir mit einem Rahmen  $\langle G, K, R \rangle$ , dabei ist  $K$  wiederum die Menge konsistenter Satzmenge, und  $R$  eine Relation über diese Menge. Jedoch sind die Elemente von  $K$  nicht als mögliche Welt zu verstehen, sondern als Individuen. Es gilt also für jedes Individuum einzeln die Wahrheitswerte der Formeln zu untersuchen. In einem nichtquantifizierten Modell besteht allerdings formal kein Unterschied darin, ob man  $K$  als Menge von Welten, oder als Menge von Individuen auffasst.

Erst in einem quantifizierten Modell wird der Unterschied deutlich, da jetzt die Individuen ( $K$ ) auch den Quantifikationsbereich darstellen. Jedoch definieren wir zuerst, wie auch bei Kripke, eine Funktion  $\Psi$ , die jedem  $H \in K$  eine Menge von Individuen zuordnet. Nur dass die semantische Interpretation jetzt nicht ist, dass diese Individuen in den  $H \in K$  enthalten sind, sondern es sich um die Individuen handelt, die aus Sicht von  $H$ , dass ja auch ein Individuum darstellt, und somit auch zur Bildmenge von  $\Psi$  gehört, sichtbar sind. In einer Welten-Interpretation wären dies natürlich genau die Individuen, die in der selben Welt sind wie  $H$ , allerdings kommen in diesem Ansatz Welten überhaupt nicht vor, so dass auch beliebige andere Interpretationen denkbar sind.

### Die Bewertungsfunktion im quantifizierten Modell

Tatsächlich stellt jedoch auch dies noch keinen formalen Unterschied zu Kripke dar. Der einzige formale Unterschied besteht in der Definition der Bewertungsfunktion ( $\varphi$ ) eines quantifizierten Modells. Auch wir weisen jedem Prädikat in jeder Welt  $H$  eine Extension zu, die eine Teilmenge von  $\Psi(H)$  ist. Kripke definiert den Notwendigkeitsoperator ( $\varphi(\Box Px_1 \cdots x_n, H)$ ) als  $\varphi(Px_1 \cdots x_n, H') = T$ , für alle  $H'$ , so dass  $HRH'$ . Das ist in diesem Ansatz aus folgendem Grund nicht möglich:

Schon bei Lewis haben wir bemerkt, dass es sich bei Formeln der Form  $Px \rightarrow \Diamond Px$ , um zwei verschiedene  $x$  ( $x_1, x_2$ ) handeln muss, wobei die Relation ( $x_1 R x_2$ ) gelten muss. Wir wollen jedoch nicht wie Lewis die modalen

Operatoren in herkömmliche Prädikatenlogik übersetzen, weshalb wir die Relation, die ja schon in unserem Rahmen die Modalitäten definiert, zusätzlich in die Bewertungsfunktion einbringen müssen. Wir definieren analog zu Kripke die Operatoren  $\wedge$  und  $\sim$  als ‘und’ und ‘oder’ für nicht rein-prädikatenlogische Formeln, aber wir definieren  $\varphi(\Box Px_1 \cdots x_n, H)$  folgendermaßen: Für alle  $H'$ , so dass  $HRH'$  gilt: Es gibt  $y_1, \dots, y_n$ , so dass  $y_1 \in \Psi(H')$ ,  $\dots$ ,  $y_n \in \Psi(H')$  und  $x_1 R y_1, \dots, x_n R y_n$  und  $\varphi(Py_1 \cdots y_n, H') = T$ . In Worten:  $P$  gilt aus Sicht aller Individuen  $H'$ , so dass  $HRH'$ , wobei man die Parameter des Prädikats durch Counterparts, die für  $H'$  sichtbar sind, ersetzen können muss.

## Unterschiede zu Lewis

Diese Definition beseitigt zum Teil die Probleme, die Lewis mit den Modalitäten der Existenz hat. Da  $\varphi(\Box Px_1 \cdots x_n, H)$  falsch ist, wenn nicht für alle  $H'$  mit  $HRH'$  Counterparts von den  $x_1, \dots, x_n$  existieren, die das Prädikat erfüllen, müssen alle  $x \in \Psi(H)$  nicht notwendiger Weise existieren. Jedoch gilt immer  $\varphi(\Box Ex, x) = T$ , dh. dass jedes Individuum aus seiner Sicht (wenn auch nicht aus Sicht anderer Individuen) notwendig existiert. Dies sehe ich jedoch nicht als Fehler an. Die individuelle Sichtweise dieses Ansatzes bringt es mit sich, dass für das Bezugsindividuum andere Modalitäten gelten, als für andere Individuen. Dies ist hervorragend mit dem Prinzip des privilegierten Zugangs zu den eigenen Bewusstseinszuständen aus der analytischen Philosophie des Geistes vereinbar.

## Strikte Interpretation des Notwendigkeitsoperators

Diese ausgezeichnete Stellung des Bezugsindividuum lässt sich jedoch durch eine striktere Definition des Notwendigkeitsoperators beseitigen. Wir definieren:

$$\varphi(\Box' A, H) = T, \text{ gdw. } \varphi(\Box A, H') = T, \text{ für alle } H' \in \Psi(H). \quad (14)$$

Die strikte Notwendigkeit ist erfüllt, wenn die einfache Notwendigkeit für alle  $H'$ , die für  $H$  sichtbar sind, erfüllt ist.

Damit haben wir wieder eine sehr weltenähnliche Interpretation: Nicht die Sicht eines Individuums zählt, sondern die aller sichtbaren Individuen. Um allerdings abgeschlossene Welten zu erhalten, müssen wir die gegenseitige Sichtbarkeit der Individuen garantieren, also u.a.  $x \in \Psi(y) \rightarrow y \in \Psi(x)$ . Somit ist diese Semantik von der Individuenrelation und dem Enthaltensein in Welten austauschbar mit Lewis' Counterpart-Theorie, und da sie anscheinend weniger Probleme aufwirft sogar eine eventuell bessere Interpretation der ‘modal realism’-Ontologie.

Es wäre jedoch auch eine Untersuchung wert, ob die Semantik ohne abgeschlossene Sichtbarkeitsklassen (die durchaus als ‘Welten’ aufgefasst werden könnten) und ohne die strikte Notwendigkeit ganz neue Perspektiven für Modallogik eröffnet, oder ob dies nur zu komplexen Konstrukten ohne sinnvolle Bedeutung führt. Dies sprengt jedoch leider den (zeitlichen) Rahmen dieses Aufsatzes.

## 6 Abschluss

In den vorangehenden Abschnitten haben wir drei verschiedene Ansätze einer Semantik für Modallogiken mehr oder weniger ausführlich behandelt. Bevor ich nun abschließend zu bewerten versuche, welcher der Ansätze denn nun der ‘bessere’ ist, will ich noch einen formalen Aspekt zur Sprache bringen, den ich vorher nicht behandelt habe.

### Relative Modalitäten

Dieser Abschnitt behandelt die Formalisierbarkeit relativer Modalitäten. Relative Modalitäten sind zB. kausale Notwendigkeit, moralische Notwendigkeit usw.

Natürlich ist es mit allen Semantiken prinzipiell möglich, sie nicht zum Formalisieren von absoluter Notwendigkeit, sondern relativer Notwendigkeit zu verwenden, Lewis bietet jedoch ein Schema an, um Sätze zu formalisieren, die verschiedene (relative) Modalitäten enthalten, zusätzlich zu den absoluten Modalitäten. Als Beispiel die ‘carpe diem’ Formel:

$$\begin{array}{ll}
 Lx & x \text{ ist ein Lebewesen} \\
 Sx & x \text{ ist sterblich} \\
 Nx & x \text{ nutzt jeden Tag, als wäre es ihr/sein letzter} \\
 (\Box_{\text{Naturgesetz}} \forall x (Lx \longrightarrow Sx)) & \longrightarrow (\Box_{\text{Moral}} \forall x (Lx \longrightarrow Nx))
 \end{array} \tag{15}$$

In Prosa: Wenn alle Lebewesen nach unseren Naturgesetzen sterblich sind, dann müssen sie nach unserer Moral jeden ihrer Tage nutzen, als wäre es ihr letzter.

Wie formalisiert Lewis solche Sätze? Zusätzlich zur Counterpart-Relation führt er für jede relative Modalität eine Weltenrelation ein, die zusätzlich noch Individuen beinhaltet. Dh. eine Welt wird in Beziehung gesetzt zu einer anderen Welt und einer Anzahl Individuen in dieser Welt. Ich spare mir eine Beispielformel an dieser Stelle, da diese Formeln so unübersichtlich sind, dass sie nicht zum Verständnis beitragen können.

Es ist mir unverständlich, warum Lewis ein so kompliziertes Schema wählt, wenn man die gleichen Beschreibungsmöglichkeiten auch erreichen könnte, indem man statt einer einzigen Counterpart-Relation eine Relation für jede relative Modalität definiert. Lewis scheint jedoch zu sehr die ‘modal realism’-Ontologie im Hinterkopf zu haben, so dass er die Counterpart-Semantik immer wieder aus den Augen verliert. Es erscheint mir nicht sinnvoll, absolute Modalitäten anders zu formalisieren als relative Modalitäten. Es ist überhaupt die Frage, ob man, wenn man relative Modalitäten formalisiert, noch eine absolute Modalität braucht.

Bei Kripke und in dem in Abschnitt 5 vorgestellten Ansatz können wir jedenfalls relative Modalitäten allein dadurch beschreiben, dass wir für jede relative Modalität eine Relation definieren. Dadurch können wir auch sehr einfach feststellen, welches System (vgl. Abschnitt 3) der jeweiligen Modalität zugrunde liegt. Dies geht natürlich auch bei Lewis, jedoch muss man immer auch die absolute Modalität beachten. Definiert zB. die Counterpart-Relation ein S5-System, so erhalten wir, selbst wenn wir die relative Weltenrelation frei wählen könnten (entspricht System K) immer nur ein S5-System.

## Willensfreiheit

Was hat Willensfreiheit mit Modallogik zu tun? Nun, Willensfreiheit setzt voraus, dass sowohl  $Px$ , als auch  $\diamond\neg Px$  gelten kann, wenn  $Px$  bedeutet:  $x$  vollbringt Handlung  $P$ . Der Umkehrschluss gilt nicht. Aus  $Px \ \& \ \diamond\neg Px$  folgt nicht, dass  $x$  über einen freien Willen verfügt, zumindest nicht bei allen Interpretationen von Willensfreiheit.

Mithilfe der Modallogik können wir jedoch auch Willensfreiheit direkt als relative Modalität einführen. Dazu führen wir einen Operator  $\diamond_{frei}$ <sup>4</sup> ein, für den gilt:

$$\diamond_{frei}Px \ \& \ \diamond_{frei}\neg Px, \quad (16)$$

gdw.  $x$  ist (Willens-) frei  $P$  zu tun, oder nicht zu tun.

Aber warum ist Willensfreiheit in diesem Zusammenhang von Bedeutung? Bei Kripke bereitet uns  $Px \ \& \ \diamond\neg Px$  keine Probleme. Bei Lewis sieht man an der Übersetzung  $Px \ \& \ \exists x_1\exists y(Wy \ \& \ Cx_1x \ \& \ \neg Px_1)$ , dass es nicht die Person ist die  $P$  tut, die auch  $\neg P$  tun könnte. Es ist der Counterpart von  $x$ , der  $\neg P$  tut. In der ‘modal realism’-Interpretation scheint mir dies sogar eine relative Willensfreiheit auszuschliessen, wie sie von Planck vorgeschlagen wird, wonach selbst in einer vollständig deterministischen und determinierten Welt jedes Individuum über eine relative Willensfreiheit verfügen kann. Wenn man die Counterpart-Theorie jedoch nur dahingehend interpretiert, dass von allen möglichen Counterparts immer nur eines real ist, und die anderen nur Alternativen wie es hätte sein können, darstellen, dann widerspricht dies natürlich nicht einer möglichen Willensfreiheit, die dann auch absolut sein könnte.

In Kripkes Semantik lässt sich natürlich nur eine absolute Willensfreiheit formalisieren, da ein Individuum entweder aus Sicht aller Individuen dieser Welt willensfrei ist, oder aus keiner Sicht.

---

<sup>4</sup>Da die Operatoren sich gegenseitig durch jeweils den anderen ausdrücken lassen, ist es egal, ob wir einen Möglichkeitsoperator, oder einen Notwendigkeitsoperator einführen.

## Ontologie

Kripkes Semantik ist nur ein formales Konstrukt, und soll auch nichts anderes sein. Genauso wie die herkömmlichen Operatoren ( $\&$ ,  $\neg$ ) wird auch der Notwendigkeitsoperator nur mit einem abstrakten Sinn erfüllt. Kripkes mögliche Welten Semantik ist nur ein Vorschlag, wie man von Sätzen, die modale Operatoren enthalten, die Wahrheitswerte bestimmen kann. Bezeichnenderweise kommen in seinem Aufsatz auch keine relativen Modalitäten vor, die versuchen dem Notwendigkeitsoperator etwas Wirklichkeit zu verleihen (zB. kausale Zusammenhänge statt einfach logischer Notwendigkeit).

Für Lewis hingegen ist 'Notwendigkeit' etwas Wirkliches, dass aus der 'modal realism' Ontologie folgt. Dies versucht er mit seiner Semantik umzusetzen. In dieser Hinsicht ist Lewis' Ansatz sehr viel interessanter als der von Kripke, da man das Gefühl hat, etwas Wirkliches mit wirklichen Individuen zu beschreiben. Bei der Betrachtung von Kripkes Semantik käme man wohl nie auf die Idee, etwas für uns so essentielles wie Willensfreiheit damit auszudrücken.

## Zusammenfassung

Die Frage, welche Semantik besser ist, ist also nicht wirklich zu klären. Vom formalen Standpunkt aus ist sicherlich Kripkes Semantik einfacher und vollständiger. Dennoch ist die Semantik von Lewis – trotz all ihrer Schwächen – interessanter und anregender.

Ich wollte, was natürlich nicht einfach ist, mit meinem Ansatz das Beste aus beiden Semantiken übernehmen. Von Kripke die Übersichtlichkeit und die formale Korrektheit, und von Lewis das emotional Bewegende. Ich hoffe, dass mir dies zumindest in Ansätzen gelungen ist.

## Literatur

- [1] Saul A. Kripke: *Semantische Untersuchungen zur Modal-Logik*,  
Aus *Acta Philosophica Fennica*, 16 (1963), 83 - 94
- [2] David K. Lewis: *Counterpart Theory and Quantified Modal Logic*,  
Aus *D. Lewis: On the plurality of Worlds*, Blackwell 1986, 26 - 46